

**БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЕ ЗАТУХАНИЕ СОЛИТОННЫХ  
РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ КОРТЕВЕГА – ДЕ ВРИЗА,  
МОДИФИЦИРОВАННОГО УРАВНЕНИЯ КОРТЕВЕГА –  
ДЕ ВРИЗА И НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА**

**Аннотация.**

*Актуальность и цели.* Решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных представляет собой актуальную и сложную задачу. В отличие от линейных дифференциальных уравнений, где разработаны общие методы решения (например, методы Фурье, Лапласа и др.) для нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных общих методов решения нет. Каждое нелинейное уравнение или небольшая группа однотипных уравнений требует разработки своих, специфических методов решения.

*Материалы и методы.* В работе рассматриваются нестационарные, затухающие солитонные решения трех уравнений (Кортевега – де Вриза, модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза и нелинейного уравнения Шредингера), описывающих, в частности, разные моды колебаний в плазме. Используя метод масштабных преобразований, найдены нестационарные (затухающие) решения указанных уравнений, справедливые для случая, когда в результате взаимодействия статистического ансамбля солитонов с плазмой на функции распределения электронов и (или ионов) формируется «немаксвелловская» высокоэнергичная часть («степенной хвост»).

*Результаты и выводы.* Полученное решение для уравнения Кортевега – де Вриза можно применять для магнитозвуковых плазменных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю, решение для модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза можно применить, например, в тепловой плазме, содержащей два сорта ионов, а решение для нелинейного уравнения Шредингера справедливо, например, в плазменной короне мишени лазерного термоядерного синтеза вблизи критической плотности.

**Ключевые слова:** уравнение Кортевега – де Вриза, модифицированное уравнение Кортевега – де Вриза, нелинейное уравнение Шредингера, солитонные решения.

*V. V. Brekhovskikh, V. V. Gorev*

**COLLISIONLESS DAMPING OF SOLITON SOLUTIONS  
OF KORTEWEG – DE VRIES EQUATIONS,  
KORTEWEG – DE VRIES MODIFIED EQUATION  
AND NONLINEAR SCHRÖDINGER EQUATION**

**Abstract.**

*Background.* Solution of nonlinear differential equations in partial derivatives is a topical and complex problem. As distinct from linear differential equations, for which the solution methods have been developed (for example, the Fourier method, the Laplace method etc.), for nonlinear differential equations in partial derivatives there are no general solution methods. Each nonlinear equation or a small group of similar equations require the development of individual specific solution methods.

*Materials and methods.* The article considers nonstationary, damped soliton solutions of three equations (Korteweg – de Vries, Korteweg – de Vries modified

equation and nonlinear Schrodinger equation), describing, in particular, various oscillation modes in plasma. Using the method of scale transformations, the authors obtained nonstationary (damped) solutions of the said equations, valid for the case when as a result of interaction of a static soliton ensemble with plasma on functions of electron and (or) ions distribution there is formed a non-Maxwellian high-energy part ("power tail").

*Results and conclusions.* The obtained solution of the Korteweg – de Vries equation may be applied for magnetosonic plasma waves, propagating at an angle to a magnetic field, the solution of the Korteweg – de Vries modified equation may be applied, for example, in warm dust plasma, containing two types of ions, and the solution of the nonlinear Schrodinger equation is valid, for example, in plasma corona target of laser thermonuclear synthesis near a critical density.

**Key words:** Korteweg – de Vries equations, Korteweg – de Vries modified equation and nonlinear Schrodinger equation, soliton solutions.

### Введение

Решение нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных представляет собой актуальную и сложную задачу. Каждое нелинейное уравнение или небольшая группа однотипных уравнений требует разработки своих, специфических методов решения [1].

В работе получено решение для уравнения Кортевега – де Вриза (КДВ), которое можно применять для магнитозвуковых плазменных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю [2], решение для модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза (МКДВ) можно применить, например, в теплой пылевой плазме, содержащей два сорта ионов [3], а решение для нелинейного уравнения Шредингера (НУШ) справедливо, например, в плазменной короне мишени лазерного термоядерного синтеза вблизи критической плотности [4].

Нелинейные волны [5] являются одним из фундаментальных объектов природы. Их можно обнаружить в гидродинамике и аэродинамике, в физике твердого тела и в физике плазмы, в оптике и в других разделах физики, где амплитуда волн достаточно велика. Солитон (от англ. *solitary wave*) – уединенная волна, в которой нелинейные эффекты, приводящие к «опрокидыванию» волны (таким образом в сплошных средах формируется ударные волны) и дисперсия (приводящая к уширению волнового пакета в пространстве) взаимно компенсируют друг друга. Солитоны способны сохранять свою форму длительное время.

В горячей бесстолкновительной плазме главным физическим эффектом, определяющим поведение плазмы, является взаимодействие самых разнообразных плазменных волн [6] с электронами и ионами (так называемое взаимодействие «волна – частица»). При этом энергия внешнего источника (например, лазера) может распределяться весьма сложным образом между коллективными модами (волнами) и частицами, приводя к формированию волн большой амплитуды и неравновесных (немаксвелловских) функций распределения электронов и ионов (так, например, и происходит в опытах по инерциальному термоядерному синтезу). Сейчас солитоны – это один из основных объектов для исследований нелинейных волн, например в пылевой плазме.

Пылевая плазма – это новое направление в плазменных исследованиях. Для пылевой плазмы характерно наличие макроскопических заряженных ча-

стиц конденсированного вещества, и в этом состоит ее основное отличие от газовой плазмы, которая состоит из частично либо полностью ионизированных молекул и электронов [3]. В «естественных» условиях пылевую плазму можно обнаружить в больших количествах в межзвездном пространстве, но ввиду большого интереса, который она представляет как объект исследования, строятся земные лабораторные установки, позволяющие генерировать пылевую плазму для проведения опытов.

Заряд пылевых частиц может на порядки превышать заряд иона обычной газовой плазмы и это обуславливает гораздо более сложное поведение пылевой плазмы. Ее уже нельзя, даже приближенно, рассматривать как «идеальный газ» ввиду того, что энергия, обусловленная силами электростатического взаимодействия, превышает среднюю тепловую энергию. Кроме того, пылевые частицы становятся центрами рекомбинации для ионов и электронов, а также способствуют «кристаллизации» – образованию упорядоченных структур.

Таким образом, наличие пылевой компоненты в плазме приводит не только к качественному изменению свойств плазмы, но и требует иных подходов для ее количественного описания. А возможность экспериментальной проверки уравнений, описывающих поведение плазмы путем воссоздания в лабораторных условиях пылевой плазмы с последующим измерением ее параметров, дает в руки исследователей отличный проверочный инструмент. Следует отметить, что в данном случае благодаря наличию визуально наблюдаемых пылевых частиц процесс проведения измерений существенно упрощается и при этом является довольно точным.

Кроме того, понимание процессов, происходящих в пылевой плазме, имеет не только теоретическое значение, но и практическое значение в связи со все большим проникновением плазменных технологий в высокоточные современные области производства. Так, в частности, основные процессы, связанные с производством компонент для микроэлектронной промышленности, использующие плазменные технологии и пылевые компоненты, в данном случае оказывают отрицательное влияние. С другой стороны, применение пылевой плазмы в области порошковых технологий и обработки поверхностей обещает получение материалов с существенно улучшенными эксплуатационными свойствами.

Перечислим основные направления исследований пылевой плазмы:

- элементарные процессы, протекающие в плазме с учетом специфики пылевой плазмы: кинетика зарядки пыли в различных условиях и при различных параметрах плазмы и самих частиц, зарядовый состав пылевой плазмы, взаимодействие между частицами в плазме, процессы рекомбинации;
- исследование процессов, связанных с возникновением ближнего порядка, фазовые переходы, взаимодействие между пылевыми частицами в плазме, их образование и рост, кристаллизация и когерентные процессы в системе пылевых частиц;
- распространение волн в пылевой плазме, линейные и нелинейные волны (солитоны, ударные волны) динамика их возникновения и затухания, устойчивость и процессы возмущения;
- исследование пылевой плазмы в условиях невесомости, исследование внешних воздействий на плазменно-пылевые структуры, исследование пылевой плазмы для случая сильно асимметричных частиц;
- исследования свойств криогенной пылевой плазмы.

Солитоны, которые могут формироваться в пылевой плазме, могут относиться к типу МКДВ, которые и будут одним из объектов исследования по данной работе.

Уравнение КДВ используется для описания различных волн в плазме холодных ионов и горячих электронов, в том числе магнитозвуковых плазменных волн, распространяющихся под углом к магнитному полю [2, 5].

Также в данной работе рассматривается уравнение НУШ, которое используют для описания огибающей волнового пакета в среде с дисперсией и кубической нелинейностью. Подобная ситуация встречается, например, при распространении электромагнитных волн в плазме: с одной стороны, плазма является диспергирующей средой, с другой стороны, при достаточно высоких амплитудах волны проявляется нелинейность, которая в некоторых случаях может быть аппроксимирована кубическим членом.

### Нестационарные солитонные решения КДВ, МКДВ и НУШ

Запишем все три уравнения КВД (1.1), МКДВ (1.2), НУШ (1.3) в модельном виде, где под  $q_t$  могут рассматриваться различные физические величины (напряженность электрического поля, возмущение плотности плазмы и т.д.), в зависимости от конкретной физической задачи:

$$q_t + 6qq_x + q_{xxx} = 0, \quad (1.1)$$

$$q_t + 6q^2q_x + q_{xxx} = 0, \quad (1.2)$$

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2q = 0. \quad (1.3)$$

Солитонные решения этих уравнений выглядят соответственно:

– для уравнения (1.1):

$$q = \frac{\Phi_0}{\cosh^2[k_0(x - v_0t)]}, \quad (2.1)$$

амплитуда солитона пропорциональна его скорости и  $k_0^2$ ;

– для уравнения (1.2):

$$q = \frac{\Phi_0}{\cosh[k_0(x - v_0t)]}, \quad (2.2)$$

скорость солитона пропорциональна квадрату амплитуды и  $k_0^2$ ;

– для уравнения (1.3):

$$q = \frac{\Phi_0}{\cosh[k_0(x - v_0t)]}, \quad (2.3)$$

$k_0$  пропорциональна амплитуде, а скорость солитона – независимый параметр.

Все три уравнения выдерживают масштабные преобразования типа:

$$x' = ax, \quad (3.1)$$

$$t' = a^h t, \quad (3.2)$$

$$q(x, t) = a^m Q(x', t'). \quad (3.3)$$

Подставляя (3) в каждое уравнения (1.1)–(1.3), мы найдем коэффициенты  $h$  и  $m$ ; так, для уравнения (1.1):

$$h=3, m=2; \quad (4.1)$$

– уравнения (1.2):

$$h=3, m=1; \quad (4.2)$$

– уравнения (1.3):

$$h=2, m=1. \quad (4.3)$$

Добавим в уравнения (1.1)–(1.3) затухающую часть в виде

$$FT^{-1}[\gamma(k)q(k)]$$

(где  $FT^{-1}$  обозначает обратное преобразование Фурье;  $\gamma(k)$  – декремент затухания;  $q(k)$  – Фурье-преобразование для  $q(x, t)$ ). Если затухание слабо, то его можно учитывать путем затухания каждой моды Фурье в спектральном разложении по отдельности.

Положим, что декремент затухания  $\gamma(k)$  зависит от  $k$  по степенному закону и имеет вид

$$\gamma(k) = \beta |k|^d, \quad \beta \ll 1,$$

где  $d > 0$ .

Данное утверждение верно, вообще говоря не всегда, а только в случае бесстолкновительной плазмы, когда в результате взаимодействия солитонных решений типа (2.1)–(2.3) с плазмой на функции распределения электронов или ионов образуется высокоэнергичная часть, имеющая степенной вид «степенной хвост». Как было показано в [4, 7] на примере ленгмюровских солитонов, именно такие решения реализуются для случая решения самосогласованной квазилинейной системы, описывающей взаимодействия ленгмюровских солитонов с плазмой.

В случае взаимодействия ленгмюровских солитонов с бесстолкновительной горячей плазмой квазилинейная система уравнений [8] имеет вид

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \frac{12}{\pi^2} N v_{Te} \frac{E_0^3}{(24\pi n T)^{3/2}} \frac{d}{d\rho} \frac{1}{\rho \text{Cosh}^2(1/\rho)} \frac{df}{d\rho}, \end{aligned} \right. \quad (5.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\varphi_0}{dt} &= \sqrt{\frac{3}{2}} \pi^3 e v_{Te}^2 \int_0^\infty \frac{d\rho}{\text{Cosh}^2(1/\rho)} \frac{df}{d\rho}, \end{aligned} \right. \quad (5.2)$$

где  $\varphi = \frac{2k_0}{k} = \left( \frac{2}{\sqrt{G\pi}} \frac{e}{\omega_{pe}T} \right) v\varphi_0(t) \equiv \chi v\varphi_0(t)$ ;  $f$  – функция распределения электронов в плазме;  $\varphi_0$  – амплитуда солитона;  $N$  – число солитонов на единицу длины;  $v$  – скорость электронов.

Коэффициент диффузии в уравнение (5.1) имеет вид  $D = \text{const}(t) \frac{1}{\rho \text{Cosh}^2\left(\frac{1}{\rho}\right)}$  (рис. 1).

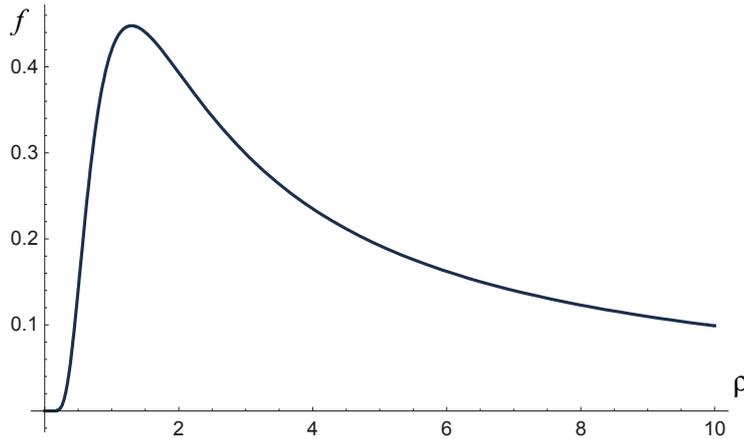


Рис. 1. Коэффициент диффузии для уравнения (5.1)

Максимум кривой, равный 0,45, достигается в точке  $\rho_M = 1,29$ .

Поскольку начальная функция распределения электронов считается равновесной (максвелловской), то амплитуда статистического ансамбля солитонов может только уменьшиться со временем  $\frac{d\varphi_0}{dt} < 0$ , при этом максимум коэффициента диффузии в переменных  $v, t$  (где  $v$  – скорость электронов, а  $t$  – время в плазме соответственно) по мере затухания солитонов будет сдвигаться вправо (в область больших скоростей) в силу условия  $\rho_M \equiv \chi_M v\varphi_0(t) = 1,29$ .

Таким образом, мы пришли к задаче об аналитическом решении нелинейной системы уравнений, одно из которых есть нелинейное уравнение диффузионного типа с «бегущим коэффициентом диффузии», а второе обеспечивает закон сохранения энергии.

В работе [4] найдено автомодельное решение системы в виде

$$f = \begin{cases} f_1 = \frac{\alpha}{v^4}, & v < v_0(t) \approx t^{4/3}, \\ f_2 = t^{-4/3} \exp\left(-\frac{G\rho^3}{3}\right) F(\rho), & v \gg v_0(t), \end{cases} \quad (6)$$

где  $\alpha \approx \text{const}$ ,  $G = \frac{1}{\pi} \frac{n_r}{n} \left( \frac{v_0}{v_0} \right)^3 \frac{1}{Nr_D}$ ;  $F(\rho) \approx \text{const}$  (функция изменяющаяся медленно по сравнению с экспоненциальной функцией), т.е. по мере затухания солитонов на функции распределения электронов плазмы формируется высокоэнергичный «хвост» электронов, правая граница которого  $v_0(t)$  движется в область больших электронных скоростей по закону  $v_0(t) \sim t^{4/3}$  (рис. 2).

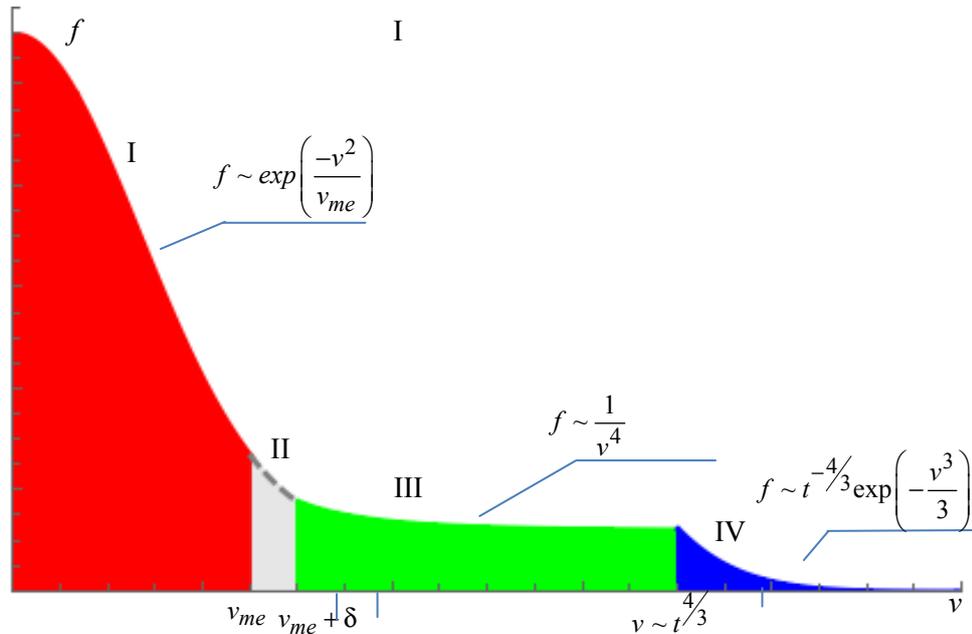


Рис. 2. Функция распределения электронов плазмы, формирующаяся при взаимодействии электронов со статистическим ансамблем солитонов:

$$\begin{aligned}
 & 0 \leq v \leq v_{me} - \text{равновесная максвеловская } f \approx e^{-v^2/v_{me}^2} \text{ (зона I);} \\
 & v_{me} + \delta \gtrsim v \gtrsim v_{me}, \delta \ll v_{me} - \text{переходная зона II, функциональный} \\
 & \quad \text{вид которой зависит от начальных условий;} \\
 & v_0(t) > v > v_{me} + \delta - \text{«степенной хвост» } f \sim \frac{1}{v^4} \text{ (зона III);} \\
 & v > v_0(t) \sim t^{4/3} - \text{граница «степенного хвоста» } f \sim t^{-4/3} \exp\left(-\frac{v^3}{3}\right) \text{ (зона IV)}
 \end{aligned}$$

С практической точки зрения это означает, что при возбуждении в плазме ленгмюровских волн большой амплитуды (солитонов), энергия внешнего источника (например, лазера) может приводить не к нагреву всей плазменной мишени, а к формированию небольшой группы высокоэнергетических электронов. Эти надтепловые электроны способны глубоко проникать в мишень и прогревать ее центральную часть, препятствуя низкоэнтропийному сжатию.

Полагая, что затухание слабое и что солитонное решение (2.1)–(2.3) сохраняет свой функциональный вид, имеем

$$\gamma = v^2 \frac{\partial f}{\partial v} \Big|_{v=\frac{\omega}{k}} = \frac{k^5}{k^2} = k^3,$$

откуда  $d = 3$ .

Поскольку слабое затухание медленно изменяет масштаб  $a = a(t)$ , взаимодействие между отдельными гармониками отсутствует и можно использовать уравнение [9]:

$$\frac{\partial E_k^2}{\partial t} + v_{\text{груп}} \frac{\partial E_k^2}{\partial x} = 2\gamma E_k^2. \quad (7)$$

В нашем случае у солитонных решений уравнений (1.1)–(1.3) нет перетекания энергии по спектру, поэтому групповой скоростью можно пренебречь и соответственно (7) примет вид

$$\frac{\partial E_k^2}{\partial t} = 2\gamma E_k^2.$$

Проинтегрируем обе части уравнения и, применив преобразование Фурье к левой части, получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \int q^2 dx = -4\pi \int \gamma_k(k) |q(k)|^2 dk. \quad (8)$$

Применив для левой части масштабные преобразования (3.1) и (3.3), уравнение (8) примет вид

$$\frac{\partial a}{\partial t} = - \frac{4\pi\beta a^{d+1} \int k'^d Q^2(k') dk'}{(2m-1) \int Q^2 dx'},$$

или

$$\frac{\partial a}{\partial t} = - \frac{\beta B}{(2m-1)A} a^{d+1}, \quad (9)$$

где константы  $A$  и  $B$  равны:

$$A = \int Q^2 dx' = 4\pi \int_0^\infty Q(k')^2 dk', \quad (10.1)$$

$$B = 4\pi \int_0^\infty k'^d Q^2(k') dk'. \quad (10.2)$$

Введем обозначение

$$M = \frac{\beta B}{(2m-1)A},$$

получим из уравнения (9):

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -Ma^{d+1}.$$

Интегрируя и полагая константу интегрирования равной

$$\text{const} = -\frac{1}{da^d(0)} \quad (t=0),$$

получим

$$\frac{1}{da^d} = Mt + \frac{1}{da^d(0)},$$

откуда

$$a = \frac{a(0)}{\left(dMt a^d(0) + 1\right)^{1/d}}. \quad (11)$$

Подставим значение  $M$  в (9), окончательно получим

$$a = \frac{a(0)}{\left(\frac{\beta}{(2m-1)A} B d t a^d(0) + 1\right)^{1/d}}. \quad (12)$$

Из (10) следует, что зависимость  $a(t)$  определяется только степенью  $d$  в законе затухания, а не различными параметрами исходного уравнения без диссипации или начальными условиями.

Отношение  $B$  к  $A$  может быть найдено путем использования преобразования Фурье для уравнений (10.1)–(10.2) и при  $d = 3$  будет равно соответственно:

– для уравнения (1.1):

$$\frac{B}{A} = \frac{\Gamma(d+3)\zeta(d+2)}{\pi^d \Gamma(3)\zeta(2)} = \frac{360\zeta(5)}{\pi^5} \approx 1,219;$$

– для уравнения (1.2):

$$\frac{B}{A} = \frac{9\zeta(3)}{\pi^3} \approx 0,349;$$

– для уравнения (1.3):

$$\frac{B}{A} = \frac{9\zeta(3)}{\pi^3} \approx 0,349,$$

где  $\zeta$  – зета-функция Римана;  $\Gamma$  – гамма-функция.

График изменения формы (рис. 3–5), солитонных решений уравнений (1.1)–(1.3), для моментов времени  $t_1 = 0$ ,  $t_2 = 10$ ,  $t_3 = 30$ ,  $t_4 = 50$ ,  $t_5 = 70$  представлены на рис. 3–5 соответственно, амплитуда и время измеряется в относительных единицах.

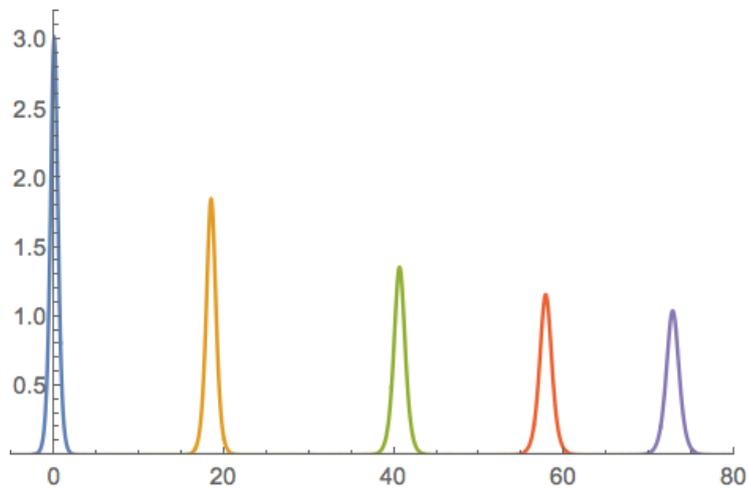


Рис. 3. Изменение формы солитона КДВ со временем

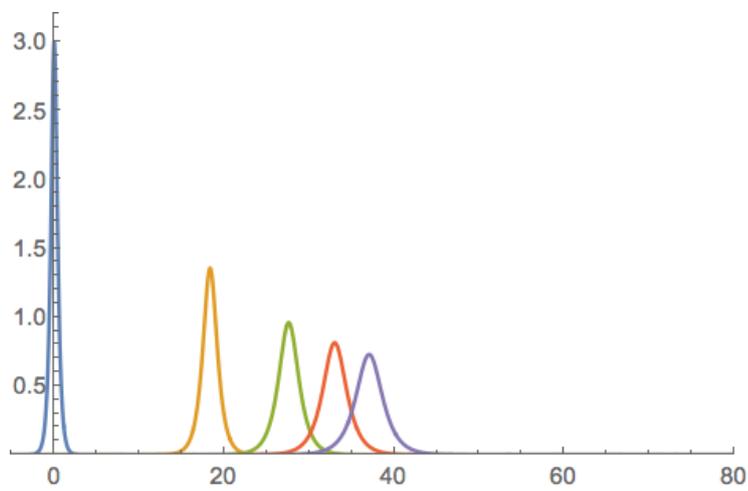


Рис. 4. Изменение формы солитона МКДВ со временем

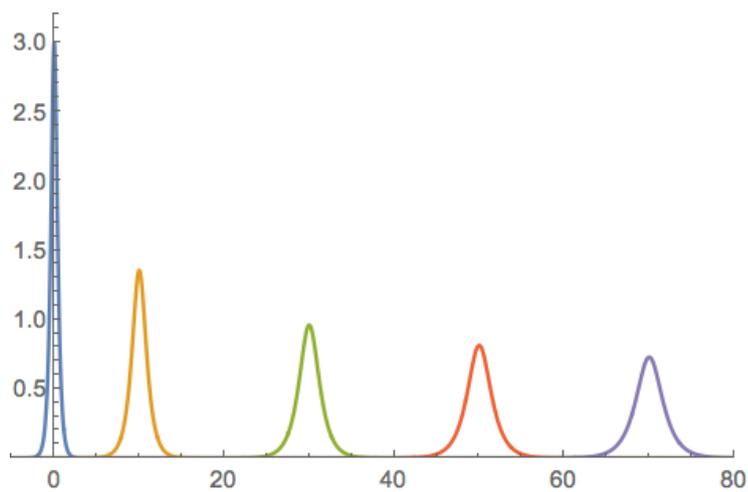


Рис. 5. Изменение формы солитона НУШ со временем

### Заключение

Получены нестационарные затухающие солитонные решения уравнений Кортевега – де Вриза, модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза и нелинейного уравнения Шредингера:

$$q_t + 12qq_x + q_{xxx} = 0,$$

$$q_t + 6q^2q_x + q_{xxx} = 0,$$

$$i q_t + q_{xx} + 2|q|^2 q = 0,$$

которые имеют вид

– для уравнения КДВ:

$$q = \frac{\varphi_0(t)}{\cosh^2[k_0(x - v_0t)]},$$

амплитуда солитона пропорциональна его скорости и  $k_0^2$ ;

– для уравнения МКДВ:

$$q = \frac{\varphi_0(t)}{\cosh[k_0(x - v_0t)]},$$

скорость солитона пропорциональна квадрату амплитуды и  $k_0^2$ ;

– для уравнения НУШ:

$$q = \frac{\varphi_0(t)}{\cosh[k_0(x - v_0t)]},$$

$k_0$  – пропорциональна амплитуде, а скорости солитона – независимый параметр.

В свою очередь  $\varphi_0(t)$  определяется соотношением

$$\varphi_0(t) = \frac{\varphi_0(t=0)}{\left( \frac{\beta}{(2m-1)} \frac{B}{A} d t \varphi_0^3(t=0) + 1 \right)^{1/d}},$$

где  $\varphi_0(t=0)$  задается начальными условиями,  $d = 3$ ,  $\beta \ll 1$  (для расчетов выбирали  $\beta = 0,01$ ). Отношение  $\frac{B}{A}$  при  $d = 3$  для уравнения КДВ  $\frac{B}{A} \approx 1,219$ , для МКДВ  $\frac{B}{A} \approx 0,349$  и для НУШ  $\frac{B}{A} \approx 0,349$ . Коэффициент  $m$  равен 2, 1 и 1 для КДВ, МКДВ и НУШ соответственно.

### Список литературы

1. **Захаров, В. Е.** Теория солитонов: Метод обратной задачи / В. Е. Захаров, С. В. Манаков, С. П. Новиков, Л. П. Питаевский. – М. : Наука, 1980. – 320 с.

2. **Карпман, В. И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах / В. И. Карпман. – М., 1973. – 176 с.
3. Пылевая плазма / В. Е. Фортов, А. Г. Харпак, С. А. Харпак, В. И. Молотов, О. Ф. Петров // *Успехи физических наук*. – 2004. – Т. 174, № 5. – С. 495–545.
4. **Горев, В. В.** Взаимодействие ленгмюровских солитонов с заряженными частицами плазмы. Ч. 1 / В. В. Горев, А. С. Кингсеп // *Журнал экспериментальной и теоретической физики*. – 1974. – Т. 66, № 6. – С. 2048.
5. **Додд, Р.** Солитоны и нелинейные волновые уравнения / Р. Додд, Дж. Эйлбек, Дж. Гиббон, Х. Моррис. – М. : Мир, 1988. – 695 с.
6. **Михайловский, А. Б.** Теория плазменных неустойчивостей : в 2-х т. / А. Б. Михайловский. – М. : Атомиздат, 1970.
7. **Gorev, V. V.** Interaction of Langmuir solitary waves with electrons of a plasma / V. V. Gorev, T. K. Soboleva // *Physics Letters A*. – 1975. – Vol. 53, Issue 4. – P. 347–348.
8. **Веденов, А. А.** Устойчивость плазмы / А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев // *Успехи физических наук*. – 1961. – Т. 63, № 4. – С. 701–766.
9. **Кадо́мцев, Б. Б.** Коллективные явления в плазме / Б. Б. Кадо́мцев. – М. : Наука, 1976. – 238 с.

### References

1. Zakharov V. E., Manakov S. V., Novikov S. P., Pitaevskiy L. P. *Teoriya solitonov: Metod obratnoy zadachi* [Theory of solitons: Method of inverse problem]. Moscow: Nauka, 1980, 320 p.
2. Karpman V. I. *Nelineynye volny v dispergiruyushchikh sredakh* [Nonlinear waves in dispersive media]. Moscow, 1973, 176 p.
3. Fortov V. E., Kharpak A. G., Kharpak S. A., Molotov V. I., Petrov O. F. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Progress of physical sciences]. 2004, vol. 174, no. 5, pp. 495–545.
4. Gorev V. V., Kingsep A. S. *Zhurnal eksperimental'noy i teoreticheskoy fiziki* [Journal of experimental and theoretical physics]. 1974, vol. 66, no. 6, p. 2048.
5. Dodd R., Eylbek Dzh., Gibbon Dzh., Morris Kh. *Solitony i nelineynye volnovye uravneniya* [Soliton and nonlinear wave equations]. Moscow: Mir, 1988, 695 p.
6. Mikhaylovskiy A. B. *Teoriya plazmennykh neustoychivostey: v 2-kh t.* [Theory of plasma instability: in 2 volumes]. Moscow: Atomizdat, 1970.
7. Gorev V. V., Soboleva T. K. *Physics Letters A*. 1975, vol. 53, iss. 4, pp. 347–348.
8. Vedenov A. A., Velikhov E. P., Sagdeev R. Z. *Uspekhi fizicheskikh nauk* [Progress of physical sciences]. 1961, vol. 63, no. 4, pp. 701–766.
9. Kadomtsev B. B. *Kollektivnye yavleniya v plazme* [Collective phenomena in plasma]. Moscow: Nauka, 1976, 238 p.

**Бреховских Владимир Валерьевич**  
инженер-исследователь, магистр,  
Национальный исследовательский центр  
«Курчатовский институт» (Россия,  
г. Москва, пл. Академика Курчатова, 1)

**Brekhovskikh Vladimir Valer'evich**  
Engineering researcher, master, National  
research center "Kurchatov institute"  
(1 Akademika Kurchatova square,  
Moscow, Russia)

E-mail: brboba@gmail.com

***Горев Владимир Васильевич***

доктор физико-математических наук,  
ведущий научный сотрудник,  
Национальный исследовательский центр  
«Курчатовский институт» (Россия,  
г. Москва, пл. Академика Курчатова, 1)

E-mail: vg.kiae@gmail.com

***Gorev Vladimir Vasil'evich***

Doctor of physical and mathematical  
sciences, leading researcher, National  
research center "Kurchatov institute"  
(1 Akademika Kurchatova square,  
Moscow, Russia)

---

УДК 533.9.01

**Бреховских, В. В.**

**Бесстолкновительное затухание солитонных решений уравнений Кортевега – де Вриза, модифицированного уравнения Кортевега – де Вриза и нелинейного уравнения Шредингера / В. В. Бреховских, В. В. Горев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2015. – № 2 (34). – С. 190–202.**